

Лекция 7.

Квантово механическое рассмотрение задачи рассеяния. Метод Борна.

Цель. Изучить метод Борна для исследования задачи рассеяния

При квантовомеханическом описании задачи рассеяния движущейся частицы нельзя пользоваться формализмом классически определенных траекторий. Дело в том, что, если частица достаточно близко пролетает мимо рассеивающего центра, настолько близко, что сталкивающиеся частицы уже нельзя рассматривать ни как точечные, ни как классические частицы конечных размеров, в этом случае вступает в силу волновая природа частиц. В результате этого, мы лишь с определенной долей вероятности можем говорить о том, что частица с заданными начальными условиями рассеется в какой-либо узкий раствор углов, в принципе ее траектория может быть любой. Условной границей применимости классического приближения служит следующее: если расстояние наименьшего сближения будет больше волны де Бройля:

$$\lambda \ll a \quad \text{или} \quad ka \gg 1 \quad (7.1)$$

то волновой природой частиц можно пренебречь и использовать классическое описание. В противном случае необходимо учитывать их волновые свойства. Общий подход в вычислениях сечений реакций в квантовомеханическом описании заключается в анализе изменения волновой функции частицы после столкновения, если до столкновения она была известна.

В качестве примера рассмотрим упругое парное рассеяние. Пусть свободная частица, движущаяся в направлении оси z , до столкновения описывается плоской волной $\Psi = e^{ikz}$. Рассеянные частицы вдали от центра должны описываться расходящейся сферической волной вида $f(\theta) \exp(ikr)/r$, где $f(\theta)$ - некоторая функция угла рассеяния θ , называемая амплитудой рассеяния. Таким образом, решение уравнения Шредингера, описывающее процесс рассеяния в поле $\Phi(r)$, должно иметь на больших расстояниях асимптотический вид

$$\Psi \approx e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \quad (7.2)$$

Вероятность рассеянной частицы пройти в единицу времени через элемент поверхности $dS = r^2 d\Omega$ равна $v r^2 |f(\theta)|^2 d\Omega = v |f(\theta)|^2 d\Omega$. Отношение ее к плотности потока в падающей волне равно

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega = 2\pi \sin\theta |f(\theta)|^2 d\theta, \quad (7.3)$$

Это и есть выражение для дифференциального сечения рассеяния на единицу телесного угла в квантовомеханическом приближении. В свою очередь, амплитуда рассеяния определяется через так называемые фазовые сдвиги, поэтому для ее определения можно непосредственно решать уравнение Шредингера или гораздо более простое дифференциальное уравнение Калоджеро для фазовых сдвигов. В этой лекции ограничимся рассмотрением частного случая – когда рассеивающее поле может рассматриваться как слабое возмущение. В этом приближении дифференциальное сечение рассеяния может быть получено из формулы Борна (1926):

$$d\sigma = \frac{4\pi m^2}{h^4} \left| \int \Phi(r) e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{r}} d\vec{r} \right|^2 2\pi \sin\theta d\theta, \quad (7.4)$$

где $\Phi(r)$ - потенциал взаимодействия сталкивающейся пары частиц, $\vec{k}$ и $\vec{k}_0$ - волновые векторы налетающей частицы после и до столкновения, при упругом рассеянии $k = k_0, \theta$ -

угол рассеяния, который для упругого рассеяния связан с волновыми векторами

следующим соотношением $\left| \vec{k} - \vec{k}_0 \right| = q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$.

Как уже отмечалось, метод Борна справедлив, когда влияние рассеивающего центра является малым, т.е. при рассеянии на малые углы, которое может иметь место либо когда относительная скорость налетающей частицы высока, либо при больших прицельных параметрах.

В сферической системе координат с полярной осью в направлении $\vec{q}$, в центрально симметричном поле амплитуда рассеяния равна

$$f = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty \Phi(r) \sin(qr) r dr \quad (7.5)$$

Для потенциала Кулона вычисление сечения рассеяния в приближении Борна дает нам формулу Резерфорда, полученную, как вы помните в рамках классического описания:

$$\sigma(\theta) = \frac{4m^2 (Z_1 Z_2)^2 e^4}{16p^4 \sin^4(\theta/2)} \quad (7.6)$$

Для других потенциалов такого совпадения не наблюдается. Для случая потенциала Дебая-Хюккеля формула дифференциального сечения в приближении Борна имеет следующий вид:

$$\sigma(\theta) = \frac{4m^2 (Z_1 Z_2)^2 e^4}{(\hbar^2 / r_d^2 + 4p^2 \sin^2(\theta/2))^2} \quad (7.7)$$

Если сравнить выражения (7.6) и (7.7) видно, что в пределе $\theta \rightarrow 0$ сечение для потенциала Кулона расходится, а для потенциала Дебая-Хюккеля расхождение снимается. Вследствие своей относительной простоты, приближение Борна часто применяется для оценки сечений ряда других реакций.

Литература:

1. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982.
2. Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы. М.: Мир. 1976.
3. Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ. 1961.
4. Смирнов Б.М. Физика слабоионизованного газа. М.: Наука, 1978.
5. Мэзон Е., Вандерслайс Дж. Атомные и молекулярные процессы. п.р. Бейтса. М.:Мир, 1964.
6. Месси Г., Бархоп Е. Электронные и ионные столкновения. М., 1971.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
8. Смирнов Б.М. Атомные столкновения и элементарные процессы в плазме. М.: Атомизд., 1968.
9. Эбелинг В., Крефт В., Кремп Д. Теория связанных состояний и ионизационного равновесия в плазме и твердом теле 1979г., с.50-52.